ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN BÁ DƯƠNG

CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC VÀ TIÊU CHUẨN BẤT KHẢ QUY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN BÁ DƯƠNG

CHUỖI LŨY THỪA HÌNH THỨC VÀ TIÊU CHUẨN BẤT KHẢ QUY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2017

Mục lục

MỞ ĐẦU

Chuỗi lũy thừa hình thức là một sự mở rộng của đa thức mà số các số hạng có thể là vô hạn. Chính vì vậy ta không thể thay biến bởi một giá trị bất kỳ, điều mà ta có thể làm được với các đa thức. Ta cũng có thể xem chuỗi lũy thừa hình thức là một dãy vô hạn sắp thứ tự các phần tử. Khi đó lũy thừa của biến được dùng để chỉ thứ tự các hệ số. Trong tổ hợp, chuỗi lũy thừa hình thức dùng để chỉ dãy số hay đa tập (Một sự tụ tập các vật có bản chất tùy ý, trong đó có thể có những vật không phân biệt được với nhau (và có thể coi như là sự lặp lại của cùng một vật)). Chẳng hạn ta có thể dùng để định nghĩa đệ quy một dãy số, còn được gọi là phương pháp hàm sinh. Phương pháp đếm dùng hàm sinh là các phương pháp đếm hữu hiệu và đang được phát triển. Nhiều loại hàm sinh đã được định nghĩa và được sử dụng trong các bài toán đếm khác nhau. Tuy nhiên hàm sinh thông thường và hàm sinh mũ là hai loại hàm sinh đã được dùng rộng rãi và hữu hiệu hơn cả. Mục đích chính thứ nhất của luận văn là tìm hiểu về vành các chuỗi lũy thừa hình thức và ứng dụng trong bài toán đếm.

Cho R là một vành giao hoán, ta ký hiệu $R[[x]]$ là tập các chuỗi lũy thừa hình thức trên R. Cùng với phép cộng và phép nhân $R[[x]]$ là một vành giao hoán. Giống như vành đa thức $R[x]$ thì $R[[x]]$ là một miền nguyên khi R là một miền nguyên. Tuy nhiên trong khi các phần tử khả nghịch của $R[x]$ là các phần tử khả nghịch của R thì các phần tử khả nghịch của $R[[x]]$ là các chuỗi lũy thừa hình thức mà số hạng tự do khả nghịch. Điều này làm cho việc nghiên cứu tính chất số học của $R[[x]]$ khi R là trường "khá đơn giản", chẳng hạn các phần tử bất khả quy chỉ là x. Tuy nhiên nghiên cứu tính bất khả quy của các phần tử trong $\mathbb{Z}[[x]]$ đã là bài toán khó. Cho đến nay có rất ít tiêu chuẩn bất khả quy cho các phần tử trong $\mathbb{Z}[[x]]$. Mục đích chính thứ hai của luận văn là tìm hiểu một số tiêu chuẩn bất khả quy của các chuỗi lũy thừa hình thức hệ số nguyên.

Tài liệu tham khảo chính cho mục đích thứ nhất là cuốn sách Ngô Đắc Tân (2004), *Lý thuyết tổ hợp và đồ thị*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà

Nội và Qiaochu Yuan (2009), *Topics in generating functions*, Massachusetts Institute of Technology, tài liệu cho mục đích thứ hai là bài báo của D. Birmajer and J. B. Gil (2008), "Arithmetic in the ring of formal power series with integer coefficients" American Mathematical Monthly, **115(6)**, 541-549.

Luận văn được chia làm hai chương. Chương 1 trình bày về chuỗi lũy thừa hình thức và ứng dụng trong các bài toán đếm. Để đơn giản luận văn thống nhất tìm hiểu chuỗi lũy thừa hình thức trên $\mathbb{C}$ trong chương này. Chương 2 tìm hiểu một số tiêu chuẩn bất khả quy của chuỗi lũy thừa hình thức với hệ số nguyên. Để việc tìm hiểu đó có ý nghĩa trước hết luận văn trình bày kết quả $\mathbb{Z}[[x]]$ là miền phân tích duy nhất. Lưu ý thêm rằng nếu R là miền phân tích duy nhất thì $R[x]$ cũng là miền phân tích duy nhất tuy nhiên điều tương tự đã được Samuel [6] chỉ ra là không đúng cho $R[[x]]$.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học toán khoá 9 đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2017

Nguyễn Bá Dương

Chương 1

Chuỗi lũy thừa hình thức

Trong suốt chương này cho $\mathbb{C}$ là trường các số phức. Ta tìm hiểu chuỗi lũy thừa hình thức với hệ số phức. Chú ý rằng ta có thể định nghĩa chuỗi lũy thừa hình thức với hệ số trên một vành giáo hoán bất kỳ.

1.1. Định nghĩa và một số tính chất cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. Một *chuỗi lũy thừa hình thức* trên $\mathbb{C}$ là một biểu thức có dạng $a = a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, sao cho giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ là hai chuỗi lũy thừa hình thức thì $a(x) = b(x)$ khi và chỉ khi $a_j = b_j$ với mọi j. Tập các chuỗi lũy thừa hình thức trên $\mathbb{C}$ kí hiệu là $\mathbb{C}[[x]]$.

Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ và $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ là hai chuỗi lũy thừa hình thức bất kỳ. Ta định nghĩa phép toán cộng, phép toán nhân trong $\mathbb{C}[[x]]$ và phép nhân các phần tử của $\mathbb{C}[[x]]$ với một số $z \in \mathbb{C}$ như sau:

$$a(x) + b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j,$$

$$a(x)b(x) = (\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}) x^j,$$

$$za(x) = z(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j) = \sum_{j=0}^{\infty} (za_j) x^j.$$

Dễ kiểm tra thấy rằng $\mathbb{C}[[x]]$ lập thành một không gian véc tơ trên $\mathbb{C}$ đối với phép toán cộng trong $\mathbb{C}[[x]]$ và phép nhân các phần tử của $\mathbb{C}[[x]]$ với một số $z \in \mathbb{C}$. Đối với phép nhân, $\mathbb{C}[[x]]$ có *phần tử đơn vị* là

$1(x) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} 0.x^j$ mà ta sẽ đơn giản kí hiệu là 1. Ta cũng dễ kiểm tra thấy rằng $\mathbb{C}[[x]]$ lập thành một vành giao hoán có đơn vị 1 đối với phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{C}[[x]]$. Phép toán nhân và phép nhân mỗi phần tử của $\mathbb{C}[[x]]$ với một số $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn hệ thức sau:

$$z[a(x)b(x)] = [za(x)]b(x) = a(x)[zb(x)].$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\mathbb{C}[[x]]$ lập thành một đại số trên $\mathbb{C}$.

Nếu với $n \in \mathbb{N}$, chuỗi lũy thừa hình thức $a(x)$ có $a_n \neq 0$ và $a_j = 0$ cho mọi $j > n$, thì $a(x)$ được gọi là *đa thức bậc n* và được đơn giản viết là $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ hay $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Hơn thế nữa, nếu $a_i = 0$ cho một i nào đó của tập $0, 1, 2, ..., n-1$, thì số hạng $a_i x^i$ cũng không cần viết; còn nếu $a_i = 1$ cho một i nào đó của tập $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, thì $a_i x^i$ được đơn giản viết là x^i. Phần tử $0(x) = \sum_{j=0}^{n} 0x^j$, mà ta đơn giản kí hiệu là 0, là *phần tử* 0 của $\mathbb{C}[[x]]$ và được định nghĩa là có bậc là -1. Ta kí hiệu $\mathbb{C}_n[x]$ là tập tất cả các đa thức bậc nhỏ hơn n. Khi đó $\mathbb{C}_n[x]$ là không gian con số chiều n.

Dễ thấy rằng $\varphi : \mathbb{C}_1[x] \to \mathbb{C}, a(x) \to a_0$ là đẳng cấu đại số. Vì thế ta có thể đồng nhất a_0 với $a(x) \in \mathbb{C}_1[x]$ và coi $\mathbb{C}$ như là một đại số con của $\mathbb{C}[[x]]$. Khi đó phép nhân một phần tử của $\mathbb{C}[[x]]$ với một số $z \in \mathbb{C}$ có thể xem như là một trường hợp riêng của phép toán nhân trong $\mathbb{C}[[x]]$.

Mệnh đề 1.1.2. Chuỗi $a(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ là khả nghịch khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$.

Chứng minh. Giả sử $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$. Khi đó $a(x)b(x) = 1$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{aligned}
a_0 b_0 &= 1, \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0, \\
a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots \dots\dots\dots\dots \\
a_0 n_b + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0 &= 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

ở đây $b_0, b_1, .., b_n$ là các ẩn số. Dễ thấy rằng hệ này có nghiệm khi và chỉ khi $a_0 \neq 0$. $\square$

Chú ý 1.1.3. *Chứng minh tương tự ta có $g(x) \in R[[x]]$ với R là vành giao hoán bất kỳ khả nghịch khi và chỉ khi a_0 khả nghịch.*

Nếu $a(x)$ là phần tử khả nghịch của $\mathbb{C}[[x]]$ thì phần tử nghịch đảo của nó sẽ được kí hiệu là $(a(x))^{-1}$ hay $\dfrac{1}{a(x)}$ hay $a^{-1}(x)$. Nếu $a(x)$ và $b(x)$ là các đa thức với $a_0 \neq 0$, thì phần tử $b(x)a^{-1}(x)$ cũng thường được viết là $\dfrac{b(x)}{a(x)}$ và được gọi là *hàm số hữu tỷ*. Với mọi $a(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ ta định nghĩa

$$a^0(x) = 1,$$

$$a^n(x) = \underbrace{a(x)a(x)...a(x)}_{n}$$

cho mọi số nguyên dương n. Nếu $a(x)$ là phần tử khả nghịch và $a^{-1}(x)$ là phần tử nghịch đảo của $a(x)$, thì ta định nghĩa

$$a^{-n}(x) = \underbrace{a^{-1}(x)a^{-1}(x)...a^{-1}(x)}_{n}$$

cho mọi số nguyên dương n.

Với $z \in \mathbb{C}$ và $0 \neq n, k \in \mathbb{N}$, đa thức $(1 - zx^n)^k$ là khả nghịch theo Mệnh đề 1.1.2. Ta có một số tính chất sau của đa thức trên

Mệnh đề 1.1.4. Với mọi $z \in \mathbb{C}$ và $0 \neq n, k \in \mathbb{N}$, ta có

(1) $\dfrac{1}{1 - zx^n} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} z^j x^{nj}$,

(2) $\dfrac{1}{(1 - zx^n)^k} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j} z^j x^{nj}$.

Chứng minh. Ta có $(1 - zx^n)(\sum_{j=0}^{\infty} z^j x^{nj}) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j x^{nj} - \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+1} x^{n(j+1)} = 1$. Vậy ta có đẳng thức (1).

Ta chứng minh đẳng thức (2) bằng quy nạp theo k. Với $k = 1$, đẳng thức (2) chính là đẳng thức (1). Giả sử đẳng thức (2) đã được chứng minh là đúng cho $k = t \geq 1$ khi đó,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-zx^n)^{t+1}} &= \frac{1}{(1-zx^n)^t}.\frac{1}{1-zx^n} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{\infty}\binom{t+j-1}{j}z^jx^{nj}\right]\left[\sum_{j=0}^{\infty}z^jx^{nj}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{j}\binom{t+i-1}{i}z^iz^{j-i})x^{nj} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{j}\binom{t+i-1}{i})z^jx^{nj}.
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức tổng cho hệ số nhị thức ta có

$$\sum_{i=0}^{j}\binom{t+i-1}{i} = \binom{(t-1)+j+1}{j} = \binom{(t+1)+j-1}{j}$$

và do đó đẳng thức (2) cũng được chứng minh cho $k = t+1$. $\square$

Hệ quả 1.1.5. *(1)* $(1-x)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}x^j$,

(2) $(1+x)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^jx^j$,

(3) $(1-x^2)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}x^{2j}$,

(4) $(1-x)^{-3} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+2}{j}x^j$.

Mệnh đề 1.1.6. Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j$ có $a_0 = 1$. Khi đó với mọi số nguyên dương n, chuỗi lũy thừa hình thức $a^n(x) = c(x) = \sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$ có $c_0 = 1, c_1 = na_1, c_j = na_j + f_{n,j}(a_1, ..., a_{j-1})$ cho mọi $j \geq 2$, ở đây $f_{n,j}$ là đa thức $j-1$ biến.

Chứng minh. Ta chứng minh Mệnh đề 1.1.6 bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, mệnh đề hiển nhiên là đúng. Giả sử mệnh đề đã được chứng minh là đúng cho $n = k$. Khi đó theo giả thiết quy nạp ta có

$$a^{k+1}(x) = a^k(x)a(x) = \left(1 + ka_1x + \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right).$$

Do đó, hệ số của x^0 cho $a^{k+1}(x)$ bằng $a_0 = 1$, hệ số của x^1 cho $a^{k+1}(x)$ bằng $1.a_1 + ka_1a_0 = (k+1)a_1$, và hệ số của $x^j (j \geq 2)$ cho $a^{k+1}(x)$ bằng

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} c_i a_{j-i} &= 1.a_j + ka_1a_{j-1} + (ka_2 + f_{k,2}(a_1))a_{j-2} + ... + \\
&\quad (ka_j + f_{k,j}(a_1, ..., a_{j-1}))a_0 \\
&= (a_j + ka_j) + ka_1a_{j-1} + (ka_2 + f_{k,2}(a_1))a_{j-2} + ... + \\
&\quad (ka_{j-1} + f_{k,j-1}(a_1, ..., a_{j-2}))a_1 + f_{k,j}(a_1, ..., a_{j-1}) \\
&= (k+1)a_j + f_{k+1,j-1}(a_1, ..., a_{j-1}),
\end{aligned}$$

ở đây $f_{k+1,j-1}(a_1, ..., a_{j-1}) = (ka_1a_{j-1} + ... + f_{k,j}(a_1, ..., a_{j-1}))$. □

Mệnh đề 1.1.7. Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $a_0 = 1$ và n là một số nguyên dương bất kỳ. Khi đó tồn tại duy nhất một $b(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ với $b_0 = 1$ sao cho $b^n(x) = a(x)$.

Chuỗi $b(x)$ tồn tại duy nhất trong Mệnh đề 1.1.7 được kí hiệu là $a^{1/n}(x)$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.6, $b_0, b_1, b_2, .., b_k, ..$ lần lượt được xác định duy nhất từ các phương trình:

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1, \\
nb_1 &= a_1, \\
nb_2 + f_{n,2}(b_1) &= a_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ldots\ \ldots\ldots \\
nb_k + f_{n,k}(b_1, ..., b_{k-1}) &= a_k, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ldots\ \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Giả sử $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ với $a_0 = 1$. Theo Mệnh đề 1.1.2, $a(x)$ có phần tử nghịch đảo là $a^{-1}(x)$. □